CÁLCULO III **Matemáticas e Informática** **Curso 2015/2016**	1^er^ Apellido: ____________ 2º Apellido: ____________	**21/12/2015** Tiempo: **2h**
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Calificación:**

SEGUNDO PARCIAL

1. (3 puntos)

(a) Sea F un campo vectorial definido sobre $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que su integral curvilínea sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ es cero. Contesta razonadamente si F es o no un campo conservativo.

(b) Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $F=(P,Q) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ un campo vectorial que verifica que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en Ω y que su integral sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ orientada positivamente es 1. Calcula su integral sobre la circunferencia $x^2+y^2=2$ orientada positivamente.

(c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a la función continua f en $[a,b]$. Justifica razonadamente si la convergencia es o no uniforme (en caso negativo, mediante un contraejemplo).

(d) Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia 2. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum a_n^2 x^n$?

(e) Se considera el sistema de funciones $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, \ldots\}$ definidas en $[0,\,1]$. Comprueba si es ortogonal y calcula la norma de cada una de sus funciones.

(f) Sea $f \in L^2[-\pi,\pi]$ una función tal que $\|f\| = \pi$ y cuya serie de Fourier es $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Calcula la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

2. (1 punto) Calcula la integral curvilínea del campo vectorial $F(x,y) = (3x^2+y^2)\mathrm{i} + (2xy+y^3)\mathrm{j}$ sobre la gráfica de la función $y=\sin x$, $0 \le x \le \pi$.

3. (1 punto) Calcula la integral curvilínea del campo vectorial $F(x,y) = \left(y+e^{x^2},\, 3x+e^{y^2}\right)$ sobre la elipse $4x^2+y^2=4$ orientada positivamente.

4. (1,5 puntos) Determina el campo de convergencia y el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$ con $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$. ¿Converge uniformemente en el campo de convergencia?

5. (1,5 puntos) (a) Halla el campo de convergencia de la serie de potencias: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$.

(b) Obtén el desarrollo en serie de potencias centrada en el origen de la función $f(x) = \dfrac{x}{(2+x)^2}$.
¿Cuál es su campo de convergencia?

6. (2 puntos) (a) Calcula la serie de Fourier de senos de la función $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$, y dibuja la función suma en el intervalo $[-3\pi,\, 3\pi]$.
(b) Determina el error que se comete al sustituir la función por los tres primeros términos no nulos de la serie.¿Cuáles son dichos términos?
(c) Usa la serie de Fourier obtenida para sumar la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

SOLUCIONES

1. a) Puede ser conservativo ó no serlo.

   b) Tambien es 1.

   c) La convergencia puede ser uniforme ó no serlo.

   d) 4

   e) No es ortogonal y $\|x^n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, \ \forall n \geq 0$

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi$

2. La integral es independiente del camino. Cambiando la curva al segmento que va de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ se calcula la integral que vale π^3.

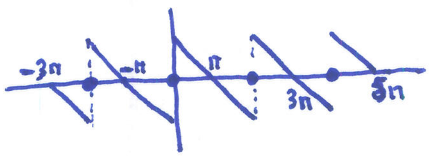
3. ~~Por~~ Aplicando el teorema de Green; la integral vale: 4π

4. $\{f_n(x)\} \longrightarrow f(x) = 0, \ \forall x \in [0,+\infty)$. Aplicando el criterio del máximo; $M_n = \dfrac{4}{n^2} e^{-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, luego la convergencia es uniforme.

5. a) El radio de convergencia es $r = 1$, y el campo de convergencia: $D = [-1, 1)$

   b) Derivando la serie geométrica y multiplicando por x: $\dfrac{x}{(2+x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$ y su campo de convergencia es $D = (-2, 2)$

6. a) $f(x) \sim 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$



   b) $S_3(x) = 2\sin x + \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x$; $E = \dfrac{2\pi^3}{3} - \dfrac{49\pi}{9} = \dfrac{\pi}{9}(6\pi^2 - 49)$

   c) Aplicando la identidad de Parseval: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$